La théorie des mouvements dans les formules

Jean-François Nicaud
Version initiale de Février 2013
jeanfrancois.nicaud@laposte.net

Article rédigé avec epsilonwriter puis copié dans Word

La théorie des mouvements dans les formules (TMF) décrit en termes de gestes certaines transformations de formules mathématiques. Elle dénombre ces mouvements et associe aux gestes des descriptions et des explications mathématiques. La TMF montre que 76% des mouvements que l'on peut raisonnablement envisager sur les opérateurs fondamentaux sont productifs, c'est-à-dire peuvent être associés à une transformation correcte.

1. Le domaine, les concepts et les mécanismes

Dans cet article, nous donnons le même sens aux mots *expression* et *formule,* celui d'expression algébrique au sens large, ayant une valeur numérique comme $2x + y^2$ ou logique comme $2x \leq y$. Cela permet d'avoir un discours général, de ne pas avoir sans arrêt à traiter deux cadres.

1.1. Le domaine

Le domaine que nous considérons dans la *théorie des mouvements dans les formules* est composé :
— des expressions rationnelles de n variables, c'est-à-dire des expressions composées avec les opérateurs + — × / ^ dont les arguments peuvent contenir des variables, à l'exception des degrés des puissances qui doivent être entiers ; ces expressions peuvent contenir d'autres opérateurs comme $\sqrt{\ }$ si leurs arguments ne comportent pas de variable, exemple : $\frac{2x^2 - y\sqrt{3}}{x^2+y^2}$
— des égalités et inégalités obtenues avec les opérateurs $= < \leq > \geq \neq$ et ayant pour arguments des expressions rationnelles de n variables au sens précédent, exemple : $2x^2 + 1 \leq \frac{y}{3z}$

La représentation des expressions que nous considérons est la suivante :
Une formule est une formule élémentaire (*lettre,* suite de chiffres représentant un *entier* ou, avec un point ou une virgule, un *décimal*) ou un opérateur appliqué à des arguments qui sont des formules.
L'arité d'un opérateur est son nombre d'arguments. Un opérateur unaire a un argument ; un opérateur binaire en a deux. L'arité d'un opérateur peut être variable.
+ est un opérateur d'arité variable ; $a + b + c$ est une somme de trois arguments, les arguments des sommes sont souvent appelés termes comme c'est l'usage.
— est un opérateur unaire, c'est l'opposé. Ainsi, $a - b$ est la somme de a et de l'opposé de b . On peut bien sûr considérer que c'est une soustraction, mais lorsque nous cherchons à étudier tous les cas possibles, nous ne nous posons pas le cas de la soustraction, nous nous posons ceux de l'addition et de l'opposé.
× est un opérateur d'arité variable qui peut être implicite, abc est un produit de trois arguments. Les arguments des produits sont parfois appelés facteurs, mais facteur a un sens plus large: *a est un facteur de a^2 et de a ce qui permet de mettre a en facteur dans $a^2 + a$* Dans cette phrase, c'est un concept de facteur différent de celui d'argument d'un produit qui est utilisé.
/ est un opérateur binaire ayant la forme d'une fraction avec un numérateur et un dénominateur.
$= < \leq > \geq \neq$ sont des opérateurs binaires.

1.2. Déplacement au même niveau, entrée, sortie

Certaines transformations algébriques correctes peuvent s'exprimer comme des ***déplacements*** d'une sous-expression a dans une formule, en ce sens que a semble avoir été enlevé d'une position pour être mis à une autre, cette opération étant éventuellement accompagnée d'une petite modification.

Les modifications que nous considérons sont :
(1) a est remplacé par son opposé $-a$
(2) a est remplacé par son inverse $\frac{1}{a}$ qui aura la forme de a était facteur et devient diviseur, ou l'inverse
(3) le sens de l'inégalité est inversé (par exemple, $\leq$ est remplacé par $\geq$)

La raison de ces limitations est de ne considérer que les *mouvements de base,* ceux qui ont vraiment l'air de *déplacements* du fait que l'on voit bien la sous-expression a au départ et à l'arrivée, et qui ne s'accompagnent pas d'une modification importante de la formule.
C'est aussi de pouvoir répondre à la question : *étant donné une formule, y a-t-il un déplacement qui permet d'enlever u ici pour le mettre là*, par exemple, avec $au = b$, pour mettre u contre b en le reliant à b avec l'opérateur qui convient. Dans cet exemple, la réponse est oui : u est *facteur* dans au , on peut l'enlever et le mettre comme *diviseur* de b . On a appliqué une règle correcte (division des deux membres de l'égalité par b) pour faire cela (il reste toutefois à ajouter la condition $b \neq 0$ si b contient des variables).

Nous considérons les trois familles de *déplacements* ci-dessous, que nous illustrons par des exemples.

Déplacement au même niveau dans une formule : Il s'agit de déplacer un argument d'un opérateur en le conservant comme argument de cet opérateur. L'application de la commutativité en est le cas typique.
Exemple : étant donné $3y + 2x + 5$, déplacer $3y$ à droite de $2x$ pour obtenir $2x + 3y + 5$

Sortie d'une formule : Faire sortir $\boldsymbol{u}$ de l'expression $\boldsymbol{A}$
Exemple : étant donné $\frac{3x}{2}$, faire sortir 3 du numérateur pour obtenir $3\frac{x}{2}$

Entrée dans une formule : Faire entrer $\boldsymbol{u}$ dans l'expression $\boldsymbol{A}$
Exemple : étant donné $3\frac{x}{2}$, faire entrer 3 au numérateur pour obtenir $\frac{3x}{2}$

Les déplacements peuvent se combiner.
Exemple : étant donné $\frac{3x}{2} = 5$, déplacer 3 à droite de = , au dénominateur, pour obtenir $\frac{x}{2} = \frac{5}{3}$
ici, 3 sort de $3x$, sort de $\frac{3x}{2}$, passe à droite de = et entre dans 5

1.3. Le statut de l'expression déplacée

Il est nécessaire de considérer l'élément que l'on déplace avec l'opérateur qui le relie au reste de l'expression, ce que nous exprimerons par un ***statut*** : 3 a le statut de ***multiplicateur*** dans $3\frac{x}{2}$, on peut le faire entrer au numérateur de $\frac{x}{2}$ en lui conservant son statut de multiplicateur, ce qui donne $\frac{3x}{2}$.

De façon analogue, 3 a le statut ***d'additionneur*** dans le membre gauche de $x + 3 = 5$, on peut le déplacer à droite de = en lui conservant son statut d'additionneur, et en le remplaçant par son opposé, ce qui donne $x = 5 - 3$.
Si l'on veut détailler, 3 sort de $x + 3$ avec le statut d'additionneur, il passe à droite de = en conservant son statut d'additionneur et en devenant -3 , puis il entre dans 5 avec son statut d'additionneur.

Le statut n'est pas toujours conservé, il y a des gestes qui le changent, ainsi : 3 a le statut de multiplicateur dans le membre gauche de $3x = 5$, on peut faire passer 3 à droite de = en lui donnant le statut de ***diviseur***, ce qui donne $x = \frac{5}{3}$

Nous considérons les trois statuts qui viennent d'être introduits : *additionneur, multiplicateur et diviseur.*

Pourquoi un statut de diviseur et pas de statut de soustracteur ?

Si l'inverse est à la multiplication ce qu'est l'opposé à l'addition, la représentation usuelle des formules et les usages ne traitent pas les opposés et les inverses de la même façon. La formule $a - b + c$ peut être considérée comme une somme de trois termes dont le deuxième est $-b$ (c'est un point de vue structurel que l'on cherche généralement à faire acquérir, et qui permet, entre autres, de considérer que l'on peut réécrire la formule en $a + c - b$ par commutativité). La formule analogue sur le plan multiplicatif est $\frac{a}{b}c$. La considérer comme un produit de trois facteurs dont le deuxième est $\frac{1}{b}$ est très inhabituel (il est encore plus inhabituel de considérer que la transformer en $a\frac{c}{b}$ se fait par commutativité).
Dans les mouvements, dire que l'additionneur a est déplacé d'ici à là en étant remplacé par $-a$ fonctionne dans toutes les situations concernées, la situation typique étant $x + 3 = 5 \rightarrow x = 5 - 3$. Pour $3x = y \rightarrow x = \frac{y}{3}$ il nous semble plus compréhensible de dire que le *facteur* 3 est déplacé contre y en devenant *diviseur*.
C'est un souci de proximité avec des formulations compréhensibles qui nous a conduits à faire ce choix.

1.4. Précisions sur les déplacements au même niveau, entrées, sorties

Déplacement au même niveau dans une formule
A côté du cas de la commutativité où l'on a un argument d'un opérateur qui change de place, nous considérons des cas comme :
$4 = x \rightarrow 0 = x - 4$ où 4 qui est un additionneur du premier argument de =, est déplacé sur le deuxième argument en étant remplacé par son opposé
$4 = x \rightarrow 1 = \frac{x}{4}$ où 4 qui est un multiplicateur du premier argument de =, est déplacé sur le deuxième argument en devenant diviseur
$\frac{a}{2}b \rightarrow a\frac{b}{2}$ où 2 qui est un diviseur du premier argument du produit, est déplacé sur le deuxième argument en restant diviseur
Ces autres cas peuvent aussi se considérer comme la sortie d'un argument pour entrer dans l'autre argument, par exemple, dans $\frac{a}{2}b \rightarrow a\frac{b}{2}$ on peut considérer qu'on fait sortir le diviseur 2 vers le produit puis qu'on le fait entrer dans le deuxième argument du produit.

Sortie d'une formule : Faire sortir $\boldsymbol{u}$ de l'expression $\boldsymbol{A}$
u sort en fait d'un argument :
Dans $\frac{3x}{2} \rightarrow 3\frac{x}{2}$ on fait sortir le multiplicateur 3 du numérateur, c'est-à-dire du premier argument de la fraction.
Etudier la sortie d'un multiplicateur d'une somme consiste à considérer $ab + c$ et à se demander si on peut enlever a du premier terme ab , ce qui laisse $b + c$, et à le combiner avec $b + c$ comme additionneur pour faire $a + (b + c)$ou $-a + (b + c)$si l'on change son signe, comme multiplicateur pour faire $a(b + c)$ou comme diviseur pour faire $\frac{b+c}{a}$.
Si l'opérateur de A est commutatif, il suffit d'étudier la sortie de l'un de ses arguments, sinon il faut étudier la sortie de chacun de ses arguments.

Entrée dans une formule : Faire entrer $\boldsymbol{u}$ dans l'expression $\boldsymbol{A}$
u entre en fait dans un argument :
Dans $3\frac{x}{2} \rightarrow \frac{3x}{2}$ on fait entrer le multiplicateur 3 au numérateur, c'est-à-dire dans le premier argument de la fraction.
Etudier l'entrée d'un multiplicateur dans somme consiste à considérer $a(\ b + c\ )$et à se demander si on peut enlever a , ce qui laisse $b + c$, et à le combiner avec b comme additionneur pour faire $(a + b\ ) + c$ ou $(b - a\ ) + c$ si l'on change son signe, comme multiplicateur pour faire $ab\ + c$ ou comme diviseur pour faire $\frac{b}{a} + c$.
Si l'opérateur de A est commutatif, il suffit d'étudier l'entrée dans l'un de ses arguments, sinon il faut étudier l'entrée dans chacun de ses arguments.

1.5. Le cas du signe $-$ et des parenthèses

Le geste de déplacement du signe $-$ se produit par exemple dans $\frac{-a}{b} \rightarrow -\frac{a}{b}$ où l'on peut considérer que l'on a déplacé le signe $-$ de "devant le numérateur" à "devant la fraction". Nous le prendrons en compte en considérant que $-a$ peut être vu comme $(-1\ )a$ et que déplacer le signe $-$ de $-a$ revient à déplacer -1 de $(-1\ )a$.

Pourquoi considérer ces cas et ne pas les incorporer dans les facteurs ? Parce que nous pensons que pour l'élève, ce n'est pas la même chose.

Nous considérons que les parenthèses servent à représenter la structure des expressions, que ce sont des opérateurs nécessaires à la représentation usuelle, mais que ce ne sont pas des opérateurs mathématiques.

1.6. Les déplacements étudiés

La liste des gestes qui sont décrits porte sur les opérateurs $+ - \times / = < \leq > \geq\ \ \neq$. Nous avons exclu l'opérateur puissance car nous considérons qu'il n'y a pas de *mouvement de base* avec lui. Il n'est pas nécessairement absent des formules, mais on ne se demandera pas si une sous-expression peut passer d'un exposant à un autre endroit d'une formule.

Nous considérons les statuts *additionneur, multiplicateur, diviseur,* et nous envisageons tous les cas possibles de déplacements au même niveau, d'entrées et de sortie. Nous indiquons les gestes qui peuvent être associés à une transformation correcte de type déplacement, en fournissant cette transformation, et nous prouvons dans les autres cas qu'une transformation correcte de type déplacement ne peut pas être associée au geste.

Dans chaque cas où l'on a une transformation correcte de type déplacement, nous fournissons :
— une description de la *technique,*
— une *explication mathématique,*
— dans de nombreux cas, une *description du geste.*

La technique est un discours pour le chercheur et l'enseignant utilisant les termes *additionneur, multiplicateur, diviseur.* L'explication et la description du geste sont destinées à l'élève. On y parle parfois de facteur et de diviseur, jamais d'additionneur ou de multiplicateur pour ne pas ajouter de nouveaux mots au vocabulaire utilisé avec l'élève.

2. Les mouvements d'additionneurs dans les opérateurs + − × /

2.1. Les déplacements au même niveau d'additionneurs dans les opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un additionneur se déplace au même niveau dans une somme.* Explication : Commutativité	$a + b + c \rightarrow b + a + c$
Technique : *Un additionneur ne se déplace pas d'un argument à un autre d'un produit.* Geste refusé : *Pas de sortie additive d'un argument d'un produit*	
Technique : *Un additionneur ne se déplace pas du numérateur au dénominateur d'une fraction.* Geste refusé : *Pas de sortie additive du numérateur.*	
Technique : *Un additionneur ne se déplace pas du dénominateur au numérateur d'une fraction.* Geste refusé : *Pas de sortie additive du dénominateur.*	

L'opérateur − étant unaire dans la TMF, la question du déplacement au même niveau ne se pose pas pour lui.

Preuve des trois gestes refusés.
Les déplacements d'un argument à un autre sont des sorties d'un argument pour entrer dans l'autre. Dans les trois cas ci-dessus, il n'y a pas de sortie additive, voir ci-dessous.

Dénombrement : 4 situations initiales possibles, 1 situation produisant un mouvement correct.

2.2. Les sorties d'additionneurs des opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un additionneur d'un terme d'une somme sort comme additionneur d'une somme.* Explication : Associativité	$(a + b) + c \rightarrow a + (b + c)$
Technique : *Un additionneur de l'argument d'un opposé sort comme additionneur de l'opposé en changeant de signe.* Explication : Opposé d'une somme Geste : *Sortie additive d'un opposé en changeant de signe*	$-(a + b + c) \rightarrow -a - (b + c)$
Technique : *Un additionneur d'un argument d'un produit ne sort pas de cet argument.* Geste refusé : *Pas de sortie additive d'un argument d'un produit*	
Technique : *Un additionneur du numérateur d'une fraction ne sort pas de ce numérateur.* Geste refusé : *Pas de sortie additive du numérateur*	
Technique : *Un additionneur du dénominateur d'une fraction ne sort pas de ce dénominateur.* Geste refusé : *Pas de sortie additive du dénominateur*	

Preuve de "Pas de sortie additive d'un argument d'un produit".
La situation initiale est $(a+b)c$ dans laquelle a est un additionneur d'un argument du produit.
Si on enlève a , on obtient bc
Peut-on combiner a avec bc pour obtenir une expression égale ?
Les possibilités de la TMF sont $a+\ bc\quad -a\ +\ bc\quad abc\ \ \frac{bc}{a}$
On prouve facilement que $(a+b)c$ n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité, c'est-à-dire qu'il n'y a pas égalité pout toutes les valeurs de $a\ b\ c$ quand les deux formules ont un sens. Par exemple, $(a+b)c$ n'est pas égal à $a+\ bc$ car pour $a=1$, $b=1$, $c=0$, $(a+b)c\ =0$ et $a+\ bc\ =1$

Preuve de "Pas de sortie additive du numérateur".
La situation initiale est $\frac{a+b}{c}$ dans laquelle a est un additionneur du numérateur.
Si on enlève a , on obtient $\frac{b}{c}$
Peut-on combiner a avec $\frac{b}{c}$ pour obtenir une expression égale ?
Les possibilités de la TMF sont $a+\frac{b}{c}\quad -a\ +\frac{b}{c}\quad a\frac{b}{c}\ \ \frac{\frac{b}{a}}{c}$
On prouve facilement que $\frac{a+b}{c}$ n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Preuve de "Pas de sortie additive du dénominateur".
Analogue.

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 2 situations produisant un mouvement correct.

2.3. Les entrées d'additionneurs dans les opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un additionneur entre comme additionneur dans un terme d'une somme.* Explication : Associativité	$a+(b+c)\to(a+b)+c$
Technique : *Un additionneur entre comme additionneur l'argument d'un opposé en changeant de signe.* Explication : Opposé d'une somme Geste : *Entrée additive dans un opposé en changeant de signe*	$a-(b+c)\to-(-a\ +b+c)$
Technique : *Un additionneur n'entre pas dans un argument d'un produit.* Geste refusé : *Pas d'entrée additive dans un argument d'un produit*	
Technique : *Un additionneur n'entre pas au numérateur* Geste refusé : *Pas d'entrée additive au numérateur*	
Technique : *Un additionneur n'entre pas au dénominateur* Geste refusé : *Pas d'entrée additive au dénominateur*	

Preuve de "Pas d'entrée additive dans un argument d'un produit".
La situation initiale est $a+\ bc$ dans laquelle a est un additionneur du produit bc
Si on enlève a , on obtient bc
Peut-on combiner a avec l'argument b pour obtenir une expression égale ?

Les possibilités de la TMF sont $(a+b)c$ $(-a+b)c$ $(ab)c$ $\frac{b}{a}c$
On prouve facilement que $a+bc$ n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Preuve de "Pas d'entrée additive au numérateur".
La situation initiale est $a+\frac{b}{c}$ dans laquelle a est un additionneur de la fraction $\frac{b}{c}$
Si on enlève a , on obtient $\frac{b}{c}$
Peut-on combiner a avec le nuémrateur b pour obtenir une expression égale ?
Les possibilités de la TMF sont $\frac{a+b}{c}$ $\frac{-a+b}{c}$ $\frac{ab}{c}$ $\frac{\frac{b}{a}}{c}$
On prouve facilement que $a+\frac{b}{c}$ n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Preuve de "Pas d'entrée additive au dénominateur".
Analogue.

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 2 situations produisant un mouvement correct.

3. Les mouvements de multiplicateurs dans les opérateurs + — × /

3.1. Les déplacements au même niveau de multiplicateurs dans les opérateurs + — × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un multiplicateur ne se déplace pas d'un terme à un autre d'une somme.* Geste refusé : *Pas de sortie multiplicative d'un terme d'une somme.*	
Technique : *Un multiplicateur se déplace par commutativité dans un produit.* Explication : Commutativité	$abc \to bac$
Technique : *Un multiplicateur se déplace du numérateur d'une fraction au dénominateur en devenant diviseur.* Explication : Division du numérateur et du dénominateur par a Geste : *Passage au dénominateur, le facteur devient diviseur*	$\frac{ab}{c} \to \frac{b}{\frac{c}{a}}$
Technique : *Un multiplicateur se déplace du dénominateur d'une fraction au numérateur en devenant diviseur.* Explication : Division du numérateur et du dénominateur par a Geste : *Passage au numérateur, le facteur devient diviseur*	$\frac{b}{ac} \to \frac{\frac{b}{a}}{c}$

L'opérateur — étant unaire dans la TMF, la question du déplacement au même niveau ne se pose pas pour lui.

Preuve du geste refusé.
Les déplacements d'un argument à un autre sont des sorties d'un argument pour entrer dans l'autre. Dans le cas ci-dessus, il n'y a pas de sortie multiplicative, voir ci-dessous.

Dénombrement : 4 situations initiales possibles, 3 situations produisant un mouvement correct.

3.2. Les déplacements au même niveau de − dans les opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un signe − ne se déplace pas d'un argument à un autre d'une somme.*	
Technique : *Un signe − se déplace par commutativité du facteur -1 dans un produit.* Explication : Commutativité (facteur -1)	$-ab \rightarrow a(-b)$
Technique : *Un signe − se déplace du numérateur d'une fraction au dénominateur.* Explication : Division du numérateur et du dénominateur par -1 *Geste : Passage du signe − au dénominateur*	$\frac{-b}{c} \rightarrow \frac{b}{-c}$
Technique : *Un signe − se déplace du dénominateur d'une fraction au numérateur* Explication : Division du numérateur et du dénominateur par -1 *Geste : Passage du signe − au numérateur*	$\frac{b}{-c} \rightarrow \frac{-b}{c}$

Preuve de "Un signe − ne se déplace pas d'un argument à un autre d'une somme".
C'est un cas particulier de "Un multiplicateur ne se déplace pas d'un argument à un autre d'une somme."

Dénombrement : 4 situations initiales possibles, 3 situations produisant un mouvement correct.

3.3. Les sorties de multiplicateurs des opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un multiplicateur ne sort pas d'un terme d'une somme.* Geste refusé : *Pas de sortie d'un facteur d'un terme d'une somme*	
Technique : *Un multiplicateur de l'argument d'un opposé sort comme multiplicateur de l'opposé.* Explication : Opposé d'un produit	$-ab \rightarrow a(-b)$
Technique : *Un multiplicateur d'un argument d'un produit sort comme multiplicateur du produit.* Explication : Associativité	$(ab)c \rightarrow a(bc)$
Technique : *Un multiplicateur d'un numérateur sort comme multiplicateur de la fraction.* Explication : Le facteur du numérateur devient facteur de la fraction	$\frac{ab}{c} \rightarrow a\frac{b}{c}$
Technique : *Un multiplicateur d'un dénominateur sort comme diviseur de la fraction.* Explication : Le facteur du dénominateur devient diviseur de la fraction	$\frac{b}{ac} \rightarrow \frac{\frac{b}{c}}{a}$

Preuve de "Un multiplicateur ne sort pas d'un terme d'une somme".
La situation initiale est $ab + c$ dans laquelle a est un multiplicateur du premier terme de la somme
Si on enlève a , on obtient $b + c$
Peut-on combiner a avec $b + c$ pour obtenir une expression égale ?
Les possibilités de la TMF sont $a + (b + c)$ $-a + (b + c)$ $a(b + c)$ $\frac{b+c}{a}$
On prouve facilement que $ab + c$ n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 4 situations produisant un mouvement correct.

3.4. Les sorties du signe − des opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un signe − ne sort pas d'un terme d'une somme.* Geste refusé : *Pas de sortie de facteur -1 d'un terme d'une somme*	
Technique : *Un signe − de l'argument d'un opposé sort comme multiplicateur de l'opposé.* Explication: Associativité (facteur -1)	$-(-b) \to -(-b)$
Technique : *Un signe − d'un argument d'un produit sort comme multiplicateur du produit.* Explication: Associativité (facteur -1)	$(-a)b \to -(ab)$
Technique : *Un signe − du numérateur d'une fraction sort comme signe − de la fraction.* Explication : Le facteur du numérateur devient facteur de la fraction	$\frac{-b}{c} \to -\frac{b}{c}$
Technique : *Un signe − du dénominateur d'une fraction sort comme signe − de la fraction.* Explication : Le facteur du dénominateur devient diviseur de la fraction	$\frac{b}{-c} \to -\frac{b}{c}$

Preuve de "Un signe − *ne sort pas* d'un terme d'une somme".
Cas particulier de "Un multiplicateur d'un argument d'une somme ne sort pas de la somme".

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 4 situations produisant un mouvement correct.

3.5. Les entrées de multiplicateurs dans les opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un multiplicateur n'entre pas dans un terme d'une somme.* Geste refusé : *Pas d'entrée d'un facteur dans une somme*	
Technique : *Un multiplicateur entre comme multiplicateur dans un opposé.* Explication : Opposé d'un produit	$a(-b) \to -(ab)$
Technique : *Un multiplicateur entre comme multiplicateur dans un produit.* Explication : Associativité	$a(bc) \to (ab)c$
Technique : *Un multiplicateur entre comme multiplicateur dans un numérateur.* Explication : Multiplication de la fraction en multipliant le numérateur	$a\frac{b}{c} \to \frac{ab}{c}$
Technique : *Un multiplicateur entre comme diviseur dans un dénominateur.* Explication : Multiplication de la fraction en divisant le dénominateur	$a\frac{b}{c} \to \frac{b}{\frac{c}{a}}$

Preuve de "Un multiplicateur n'entre pas dans un terme d'une somme".
La situation initiale est $a(b+c)$
Si on enlève a , on obtient $b+c$
Peut-on déplacer a sur le terme b de la somme pour obtenir une expression égale ?
Les possibilités de la TMF sont $(a+b)+c \quad (b-a)+c \quad ab+c \quad \frac{b}{a}+c$
On prouve facilement que $a(b+c)$n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 4 situations produisant un mouvement correct.

3.6. Les entrées de signe − dans les opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un signe − n'entre pas dans un terme d'une somme.* Geste refusé : *Pas d'entrée d'un facteur −1 dans une somme*	
Technique : *Un signe − entre comme multiplicateur dans un opposé.* Explication : Opposé d'un produit	$-(-b) \to -(-b)$
Technique : *Un signe − entre comme multiplicateur dans un argument d'un produit.* Explication : Associativité (facteur -1)	$-(ab) \to (-a)b$
Technique : *Un signe − entre au numérateur d'une fraction.* Explication : Multiplication de la fraction par −1 en multipliant le numérateur	$-\frac{b}{c} \to \frac{-b}{c}$
Technique : *Un signe − entre au dénominateur d'une fraction.* Explication : Multiplication de la fraction par −1 en divisant le dénominateur	$-\frac{b}{c} \to \frac{b}{-c}$

Preuve de "Un multiplicateur n'entre pas dans un terme d'une somme".
La situation initiale est $a(b+c)$
Si on enlève a , on obtient $b+c$
Peut-on déplacer a sur le terme b de la somme pour obtenir une expression égale ?
Les possibilités de la TMF sont $(a+b)+c$ $(-a+b)+c$ $ab+c$ $\frac{b}{a}+c$
On prouve facilement que $a(b+c)$n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 4 situations produisant un mouvement correct.

4. Les mouvements de diviseurs dans les opérateurs + − × /

4.1. Les déplacements de diviseurs dans les opérateurs + − × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un diviseur ne se déplace pas d'un terme à un autre d'une somme.* Geste refusé : *Pas de sortie d'un diviseur d'un terme d'une somme.*	
Technique : *Un diviseur se déplace d'un argument à l'autre dans un produit.* Explication en 2 temps : Le diviseur d'un facteur devient diviseur du produit ; Le diviseur du produit devient diviseur d'un des facteurs	$\frac{b}{a}c \to b\frac{c}{a}$
Technique : *Un diviseur se déplace du numérateur au dénominateur en devenant multiplicateur.* Explication : Multiplication du numérateur et du dénominateur par a	$\frac{\frac{b}{a}}{c} \to \frac{b}{ac}$
Technique : *Un diviseur se déplace du dénominateur au numérateur en devenant multiplicateur.* Explication : Multiplication du numérateur et du dénominateur par a	$\frac{b}{\frac{c}{a}} \to \frac{ab}{c}$

L'opérateur $-$ étant unaire dans la TMF, la question du déplacement au même niveau ne se pose pas pour lui.

Preuve de "Un diviseur ne se déplace pas d'un terme à un autre d'une somme".
Les déplacements d'un argument à un autre sont des sorties d'un argument pour entrer dans l'autre. Dans le cas ci-dessus, il n'y a pas de sortie possible de diviseur, voir ci-dessous.

Dénombrement : 4 situations initiales possibles, 3 situations produisant un mouvement correct.

4.2. Les sorties de diviseurs des opérateurs + $-$ × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un diviseur ne sort pas d'un terme d'une somme.* Geste refusé : *Pas de sortie d'un diviseur d'un terme d'une somme.*	
Technique : *Un diviseur de l'argument d'un opposé sort comme diviseur de l'opposé.* Explication : Opposé d'une fraction	$-\frac{b}{a} \to \frac{-b}{a}$
Technique : *Un diviseur d'un argument d'un produit sort comme diviseur du produit.* Explication : Le diviseur d'un facteur devient diviseur du produit	$\frac{b}{a}c \to \frac{bc}{a}$
Technique : *Un diviseur d'un numérateur sort comme diviseur de la fraction.* Explication : Le diviseur du numérateur devient diviseur de la fraction.	$\frac{\frac{b}{a}}{c} \to \frac{\frac{b}{c}}{a}$
Technique : *Un diviseur du dénominateur d'une fraction sort comme multiplicateur de la fraction.* Explication : Le diviseur du dénominateur devient facteur de la fraction.	$\frac{b}{\frac{c}{a}} \to a\frac{b}{c}$

Preuve de "Un diviseur ne sort pas d'un terme d'une somme".
La situation initiale est $\frac{b}{a}+c$
Si on enlève a , on obtient $b+c$
Peut-on déplacer a sur $b+c$ pour obtenir une expression égale ?
Les possibilités de la TMF sont $a+(b+c)$ $-a+(b+c)$ $a(b+c)$ $\frac{b+c}{a}$
On prouve facilement que $\frac{b}{a}+c$ n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 4 situations produisant un mouvement correct.

4.3. Les entrées de diviseurs dans les opérateurs + $-$ × /

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un diviseur n'entre pas dans un terme d'une somme.* Geste refusé : *Pas d'entrée d'un diviseur dans une somme*	
Technique : *Un diviseur entre comme diviseur dans un opposé.* Explication : Opposé d'une fraction	$\frac{-b}{a} \to -\frac{b}{a}$
Technique : *Un diviseur d'un produit entre comme diviseur d'un argument du produit.* Explication : Le diviseur du produit devient diviseur d'un des facteurs	$\frac{bc}{a} \to \frac{b}{a}c$

Technique : *Un diviseur d'une fraction entre comme diviseur dans le numérateur de la fraction.* Explication : Division de la fraction en divisant le numérateur.	$\frac{\frac{b}{c}}{a} \to \frac{\frac{b}{a}}{c}$
Technique : *Un diviseur entre comme multiplicateur dans le dénominateur d'une fraction.* Explication : division de la fraction en multipliant le dénominateur	$\frac{\frac{b}{c}}{a} \to \frac{b}{ac}$

Preuve de "Un diviseur n'entre pas dans un terme d'une somme".

La situation initiale est $\frac{b+c}{a}$

Si on enlève a , on obtient $b + c$

Peut-on déplacer a sur le terme b pour obtenir une expression égale ?

Les possibilités de la TMF sont $(a + b) + c$ $(-a + b) + c$ $ab + c$ $\frac{b}{a} + c$

On prouve facilement que $\frac{b+c}{a}$ n'est égal à aucune de ces formules au sens de l'identité.

Dénombrement : 5 situations initiales possibles, 4 situations produisant un mouvement correct.

5. Les mouvements dans les relations $= < \leq > \geq \neq$

Une expression ne peut pas entrer dans une relation ou sortir d'une relation car les expressions de la forme $a + (b = c)$ $-a + (b = c)$ $a(b = c)$ $\frac{b=c}{a}$ sont incorrectes.

5.1. Les déplacements d'additionneurs dans les relations

Descriptions du geste, commentaires	Exemples
Technique : *Un additionneur d'un membre d'une relation* $= < \leq > \geq \neq$ *passe dans l'autre membre comme additionneur en changeant de signe.* Explication : Addition aux deux membres de $-a$ Geste : *Passage additif dans l'autre membre en changeant de signe*	$a + b = c \to b = -a + c$ $a = c \to 0 = -a + c$ $a \neq c \to 0 \neq -a + c$

Dénombrement : 6 situations initiales possibles, 6 situations produisant un mouvement correct.

5.2. Les déplacements de multiplicateurs dans les relations

Descriptions du geste, commentaires	**Exemples**
Technique : *Un multiplicateur non nul d'un membre d'une relation* $=\ \neq$ *passe dans l'autre membre en devenant diviseur.* Explication : Division des deux membres par a Geste : *Passage multiplicatif dans l'autre membre, le facteur devient diviseur*	Quand $a \neq 0$ $ab = c \rightarrow b = \frac{c}{a}$
Technique : *Un multiplicateur strictement positif d'un membre d'une relation* $< \leq > \geq$ *passe dans l'autre membre en devenant diviseur.* Explication : Division des deux membres par 2 *Geste : Passage multiplicatif d'une expression positive dans l'autre membre, le facteur devient diviseur*	$2b \leq c \rightarrow b \leq \frac{c}{2}$
Technique : *Un multiplicateur strictement négatif d'un membre d'une relation* $< \leq > \geq$ *passe dans l'autre membre en devenant diviseur avec changement de sens de l'inégalité.* Explication : Division des deux membres par -2 *Geste : Passage multiplicatif d'une expression positive dans l'autre membre, le facteur devient diviseur, changement de sens de l'inégalité*	$(-2)b > c \rightarrow b < \frac{c}{-2}$

Dénombrement : 6 situations initiales possibles, 6 situations produisant un mouvement correct.

5.3. Les déplacements de diviseurs dans les relations

Descriptions du geste, commentaires	**Exemples**
Technique : *Un diviseur non nul d'un membre d'une relation* $= \neq$ *passe dans l'autre membre en devenant multiplicateur.* Explication : Multiplication des deux membres par b *Geste : Passage multiplicatif dans l'autre membre, le diviseur devient facteur*	Quand $b \neq 0$ $\frac{a}{b} = c \rightarrow a = bc$
Technique : *Un diviseur strictement positif d'un membre d'une relation* $< \leq > \geq$ *passe dans l'autre membre en devenant multiplicateur.* Explication : Multiplication des deux membres par 2 *Geste : Passage multiplicatif d'une expression positive dans l'autre membre, le diviseur devient facteur*	$\frac{b}{2} > c \rightarrow b > 2c$
Technique : *Un diviseur strictement négatif d'un membre d'une relation* $< \leq > \geq$ *passe dans l'autre membre en devenant multiplicateur, avec changement de sens de l'inégalité.* Multiplication des deux membres par -2 *Geste : Passage multiplicatif d'une expression négative dans l'autre membre, le diviseur devient facteur, changement de sens de l'inégalité*	$\frac{b}{-2} \leq c \rightarrow b \geq (-2)c$

Dénombrement : 6 situations initiales possibles, 6 situations produisant un mouvement correct.

6. Synthèse

Le tableau ci-dessous totalise les cas étudiés dans la TMF.

Statut	**Dans les opérateurs**	**Type de mouvement**	**Cas étudiés**	**Mouvements retenus**
additionneur	+ − × /	déplacements, sorties, entrées	14	5
multiplicateurs	+ − × /	déplacements, sorties, entrées	14	11
diviseurs	+ − × /	déplacements, sorties, entrées	14	11
additionneur	= < ≤ > ≥ ≠	déplacements	6	6
multiplicateurs	= < ≤ > ≥ ≠	déplacements	6	6
diviseurs	= < ≤ > ≥ ≠	déplacements	6	6
signe −	+ − × /	déplacements, sorties, entrées	14	11
Total			74	56

Ainsi, pour les opérateurs fondamentaux + - × / et les relations, pour les statuts et la classe de mouvements considérés, la TMF identifies 74 cas et 56 de ces cas produisent des transformations correctes, ce qui correspond à 76%.
Ce pourcentage significatif permet de considérer les gestes qui peuvent être effectués selon la TMF comme des objets signifiants des manipulations algébriques.